

امتحان شهادة بكالوريا التعليم الثانوي دورة 2008

الشعبة : تقني رياضي

المدة : 04 ساعات و 30 د

اختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :
الموضوع الأول

تمرين 1: (4 نقاط)

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة (*) المعرفة كما يلي:

$$Z^3 + (2-4i)Z^2 - (6+9i)Z + 9(-1+i) = 0 \quad \dots (*)$$

1/ بَيِّن أن $Z_0 = 3i$ هو حل للمعادلة (*)

2/ حل، في \mathbb{C} ، المعادلة (*) ثم اكتب حلولها Z_2, Z_1, Z_0 على الشكل الأسّي حيث $|Z_1| < |Z_2|$.

3/ لتكن A, B, C صور الحلول Z_2, Z_1, Z_0 على الترتيب في مستو منسوب إلى معلم متعامد

ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. عَيِّن النقطة G مرجح الجملة $\{(A,1); (B,1); (C,-1)\}$.

4/ عَيِّن المجموعة (E) للنقطة M حيث : $AM^2 + BM^2 - CM^2 = -13$

بَيِّن أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (E) ثم أنشئ (E) .

5/ تحقق أن النقطة O, B و G في استقامة ثم عَيِّن صورة المجموعة (E) بالتحاكي الذي مركزه

النقطة O ويحول B إلى G محددا عناصره المميزة.

تمرين 2: (5 نقاط)

نعتبر الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$A(1,2,2), B(3,2,1), C(1,3,3)$ نقط من هذا الفضاء.

1/ برهن أن النقطة A, B, C تعيّن مستو يطلب تعيين معادلته الديكارتية.

2/ نعتبر المستويين (P_1) و (P_2) المعرفين بمعادلتيهما الديكارتيتين :

$$(P_1): x - 2y + 2z - 1 = 0$$

$$(P_2): x - 3y + 2z + 2 = 0$$

بَيِّن أن (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) .

3/ بَيِّن أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

4/ بَيِّن أن الشعاع $\vec{u}(2,0,-1)$ هو أحد أشعة توجيه المستقيم (Δ) .

5/ استنتج أن التمثيل الوسيط للمستقيم (Δ) هو الجملة:

$$\begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = 3 \\ z = -k + 3 \end{cases}$$

حيث $(k \in \mathbb{R})$

6/ لتكن M نقطة من المستقيم (Δ) ، أوجد قيمة الوسيط k حتى يكون الشعاعان \overline{AM} و \overline{u} متعامدين، ثم استنتج المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) .

تمرين 3: (7 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;2]$ بالعلاقة $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

1/ أ- ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0;2]$

ب- أنشئ (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
(الوحدة على المحورين $4cm$)

ج- برهن أنه إذا كان $x \in [0;2]$ فإن $f(x) \in [0;2]$.

2/ نعرف المتتالية العددية (U_n) على \mathbb{N} كالآتي :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

أ - برر وجود المتتالية (U_n) . احسب الحدين U_1 و U_2

ب - مثل الحدود U_0 ، U_1 و U_2 على محور الفواصل وذلك بالاستعانة بالمنحنى (C) والمستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$.

ج - ضع تخميناً حول اتجاه تغير (U_n) و تقاربها انطلاقاً من التمثيل السابق.

3/ أ - برهن بالتراجع على العدد الطبيعي n أن : $0 \leq U_n \leq \sqrt{3}$.

ب - برهن أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن : $U_{n+1} > U_n$.
ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب (U_n) ؟

ج - تحقق أن : $U_{n+1} - \sqrt{3} \leq \frac{2-\sqrt{3}}{U_n+2} (U_n - \sqrt{3})$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم.

عین عددا حقیقياً k من $]0;1[$ بحيث : $|U_{n+1} - \sqrt{3}| \leq k |U_n - \sqrt{3}|$

بیّن أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $|U_n - \sqrt{3}| \leq k^n |U_0 - \sqrt{3}|$. استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

تمرين 4: (4 نقاط)

n عدد طبيعي أكبر من 5.

1/ a و b عدنان طبيعيان حيث $a = n-2$ و $b = 2n+3$

أ - ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ؟

ب - بيّن أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n+5$ مضاعفا للعدد 7.

ج - عین قیم n التي يكون من أجلها $PGCD(a;b) = 7$

2/ نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث :

$$q = n^2 - 7n + 10 \text{ و } p = 2n^2 - 7n - 15$$

أ - بيّن أن كل من العددين p و q يقبل القسمة على $n-5$.

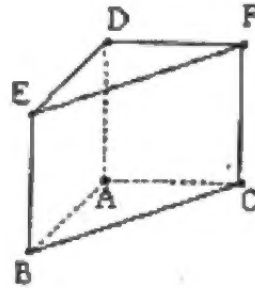
ب - عین تبعاً لقيم n وبدلالة n ، $PGCD(p;q)$.

التمرين الأول: (04 نقاط)

- نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y : (I) $4x - 9y = 319$.
- (1) - تأكد أن الثنائية $(1, 82)$ حل للمعادلة (I).
- حل المعادلة (I).
- (2) عين الثنائيات (a, b) الصحيحة، حلول المعادلة : (II) $4a^2 - 9b^2 = 319$
- (3) استنتج الثنائيات (x_0, y_0) حلول المعادلة (I) بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

$ABCDEF$ منشور قائم قاعدته المثلث ABC القائم في A والمتساوي الساقين وجهه $ABED$ و $ACFD$ مربعان متقايسان طول ضلع كل منهما r حيث $r \in \mathbb{R}^+$.
(انظر الشكل)



- (1) يرمز I إلى منتصف $[AD]$ و J إلى مركز نقل الرباعي $BCFE$. بين أن G مرجح الجملة $\{(A;2), (B;1), (C;1), (D;2), (E;1), (F;1)\}$ هو منتصف $[IJ]$
- (2) ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد المتجانس $(A; \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})$.
- عين إحداثيات النقاط F, E, D, C, B, A
- عين مجموعة النقاط M من الفضاء التي تحقق :
$$2MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2MD^2 + ME^2 + MF^2 = 10r^2$$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

- r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي كفي.
- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z :
$$z^2 - 2i \left(r \cos \frac{\theta}{2}\right)z - r^2 = 0$$

اكتب الحلين على الشكل الأسّي.
- (2) في المستوى المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B صورتا الحلين.
عين θ حتى يكون المثلث OAB متقايس الأضلاع.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

1 (f الدالة العددية المعرفة على $]-2; +\infty[$ كما يأتي: $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x + 2}$.

C_f منحنى f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
(وحدة الأطوال 2cm)

أ - احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف .
ب - ادرس اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها.

ج - بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 2$ مقارب للمنحنى C_f ثم ارسم C_f و (D) .

د - بين أن صورة المجال $\left[1; \frac{5}{2}\right]$ محتواة في المجال $\left[1; \frac{5}{2}\right]$

2 (نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بحدّها الأول $U_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $U_{n+1} = f(U_n)$.

أ - باستخدام C_f و المستقيم ذي المعادلة $y = x$ ، مثل U_0 و U_1 و U_2 على حامل محور الفواصل (Ox) .

ب - خمن اتجاه تغير وتقارب المتتالية (U_n) .

ج - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $1 \leq U_n \leq \frac{5}{2}$ و أن المتتالية (U_n) متزايدة .

د - استنتج أن (U_n) متقاربة و احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

تكتب الإجابة النموذجية على هذه الورقة و لا تقبل سواها

الإجابة النموذجية لموضوع لامتحان :يكالوريا دورة:2008
اختبار مادة: الرياضيات الشعبة: تقني رياضي المدة: 04 ساعات و 30 د .

الإجابة النموذجية وسلم التقييم

الموضوع الأول

المجموع	العلامة	عناصر الإجابة	الموضوع
04	0.5 0.25 0.25×4 0.25×3 0.25 0.5 0.25 0.25 0.25	<p>تمرين 1: (4 نقاط)</p> <p>1/ بالتعويض في المعادلة (*) نبين أن $Z_0 = 3i$ هو حل لها</p> <p>2/ حلول (*) في \mathbb{C} هي :</p> <p>$(Z - 3i)[Z^2 + (2 - i)Z - 3 - 3i] = 0$</p> <p>$Z_2 = -3$ ، $Z_1 = 1 + i$ ، $Z_0 = 3i$ ، $\Delta = 15 + 8i = (4 + i)^2$</p> <p>الشكل الأسّي $Z_2 = 3e^{i\pi}$ ، $Z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $Z_0 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$</p> <p>3/ تعيين النقطة $G(4,4)$:</p> <p>4/ المجموعة (E) هي الدائرة ذات المركز G ونصف القطر $\sqrt{17}$</p> <p>A نقطة من هذه الدائرة لأن $GA = \sqrt{17}$</p> <p>5/ العبارة المركبة للتحاكي المطلوب هي : $z' = 4z$</p> <p>صورة المجموعة (E) بهذا التحاكي هي الدائرة ذات المركز</p> <p>$G'(16;16)$ ونصف القطر $4\sqrt{17}$</p>	<p>المركبة</p> <p>يلات نقطية</p>
		<p>تمرين 2: (5 نقاط)</p> <p>1/ نلاحظ أن $\overline{AB}(2,0,-1)$ و $\overline{AC}(0,1,1)$ مستقلان خطيا</p> <p>منه النقط A, B, C تعين مستو معادلته هي $x - 2y + 2z - 1 = 0$</p> <p>2/ (P_1) و (P_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) لأن الشعاعين الناظرين عليهما</p> <p>\vec{n}_2 و \vec{n}_1 غير متوازيين حيث $\vec{n}_1(1,-2,2)$ و $\vec{n}_2(1,-3,2)$</p> <p>3/ C تنتمي إلى المستقيم (Δ) لأنها نقطة مشتركة بين (P_1) و (P_2)</p>	

العلامة		عناصر الإجابة	محاوَر الموضوع
مجموع	مجزأة		
05	0.25×3	4/ يكفي إثبات أن الشعاع $\vec{u}(2,0,-1)$ عمودي على كل من الشعاعين $\vec{n}_1(1,-2,2)$ و $\vec{n}_2(1,-3,2)$	هندسة فضائية
	0.75	5/ استنتاج أن التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ) هو	
		$\begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = 3 \\ z = -k + 3 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$	
	0.75	6/ قيمة الوسيط k حتى يكون \overline{AM} و \overline{u} متعامدين هي $k = \frac{1}{5}$	
	0.75	المسافة بين A و (Δ) هي الطول $AM = \frac{3\sqrt{5}}{5}$	
	0.25×2+0.5	تمرين 3: (7 نقاط) 1/ أ - دراسة تغيرات f على المجال $[0;2]$	الدوال العددية المتتاليات العددية
	0.25	$f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ - إشارة $f'(x)$ واتجاه التغير -	
	0.75	جدول التغيرات	
	0.5	ب - إنشاء المنحنى (C)	
		ج - برهان أنه إذا كان $x \in [0;2]$ فإن $f(x) \in [0;2]$	
		من جدول التغيرات وحيث أن f مستمرة ومنتزيدة تماما على المجال المعطى $f(0) = \frac{3}{2}$ و $f(2) = \frac{7}{4}$ نستنتج أن صورة أي عدد حقيقي x من المجال $[0;2]$ بالدالة f هي العدد الحقيقي $f(x)$ من المجال $[\frac{3}{2}; \frac{7}{4}]$	
		وحيث أن $[\frac{3}{2}; \frac{7}{4}]$ محتوًى في $[0;2]$ ينتج $f(x) \in [0;2]$.	
	0.25	2/ أ - نبرّر وجود المتتالية (U_n) بتوضيح أن كل حدودها تنتمي إلى المجال $[0;2]$ وهذا محقق بالنظر إلى جواب السؤال 1/ ج -	
	0.25×2	* حساب U_1 و U_2	
	0.25×3	ب - تمثيل الحدود U_0, U_1, U_2	
	0.25	ج - <u>التخمين</u> : (U_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى وبالتالي فهي متقاربة	
	0.75	3/ أ - البرهان بالتراجع على العدد الطبيعي n أن: $0 \leq U_n \leq \sqrt{3}$	
	0.75	ب - البرهان أن: $U_{n+1} > U_n$ من أجل كل عدد طبيعي n	

العلامة		عناصر الإجابة	مجاورة	المجموع	مجاورة
07	0.25	بما أثنا برهنا أن (U_n) محدودة من الأعلى بالعدد $\sqrt{3}$ ومتزايدة تماما نستنتج أنها متقاربة وهذا ما يؤكد صحة المخمئة السابقة			
	0.25	ج - التحقق أن $U_{n+1} - \sqrt{3} \leq \frac{2-\sqrt{3}}{U_n+2}(U_n - \sqrt{3})$			
	0.25	تعيين عددا حقيقيا k يجيب عن السؤال			
	0.25	تبيان أن : $ U_n - \sqrt{3} \leq k^n U_0 - \sqrt{3} $			
	0.25	من المتباينة السابقة نستنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \sqrt{3}$			
04	0.75	تمرين 4: (4 نقاط) 1/ أ - القيم الممكنة للعدد $\text{pgcd}(a,b)$ هي 1 أو 7			
	0.75	ب - نعتد على المساواة $b-a=n+5$ لكي نبرهن أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n+5$ مضاعفا للعدد 7			
	0.25×2+0.25	ج - تعيين قيم n التي يكون من أجلها $\text{PGCD}(a;b)=7$ بناء على جواب السؤال السابق فإن قيم n التي يكون من أجلها $\text{PGCD}(a;b)=7$ هي نفسها قيم n التي يكون من أجلها $n+5$ مضاعفا للعدد 7 أي $n+5 \equiv 0[7]$ ومنه $n=7k-5$ مع $k>1$.			
	0.25×2	2/ أ - العددان p و q يقبلان القسمة على $n-5$ لأن $q=(n-5)(n-2)$ و $p=(n-5)(2n+3)$			
	0.25	ب - تعيين تبعا لقيم n وبدلالة n $\text{PGCD}(p;q)$ لدينا $\text{PGCD}(p;q)=(n-5)\text{PGCD}(a;b)$			
	0.5	نميز حالتين هما: 1- لما $\text{PGCD}(a;b)=7$			
	0.5	نجد : $\text{PGCD}(p;q)=7(n-5)$ مع $n=7k-5$ أي $\text{PGCD}(p;q)=7(7k-10)$ و $k>1$ 2- لما $\text{PGCD}(a;b) \neq 7$ أي $\text{PGCD}(a;b)=1$ نجد : $\text{PGCD}(p;q)=(n-5)$ مع $n \neq 7k-5$.			
		انتهى			

العلامة		عناصر الإجابة	معايير الموضوع
المجموع	مجزأة		
1.25	0.25	<p><u>التمرين الأول : 04 ن</u></p> <p>(1) التأكد من أن $(82, 1)$ حل للمعادلة (I)</p> <p>حلول المعادلة (I) هي : $(x = 9k + 82, y = 4k + 1)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$</p> <p>(2) $(2a - 3b)(2a + 3b) = 11 \times 29$</p> <p>$S = \{(-80, -53); (-80, 53); (-10, -3); (-10, 3); (80, -53); (80, 53); (10, 3); (10, -3)\}$</p> <p>(3) الاستنتاج : $S' = \{(100, 9); (6400, 2809)\}$</p>	القواسم والمضاعفات
1.75	0.75		
1	1		
1	1		
1	1	<p><u>التمرين الثاني : 04 ن</u></p> <p>(1) تبين أن G منتصف $[IJ]$</p> <p>(2) $F(0, r, r); E(r, 0, r); D(0, 0, r); C(0, r, 0); B(r, 0, 0); A(0, 0, 0)$</p> <p>مجموعة النقاط M هي سطح الكرة الذي مركزها $G\left(\frac{r}{4}, \frac{r}{4}, \frac{r}{2}\right)$ ونصف قطرها $\frac{r}{4}\sqrt{10}$</p>	هندسة فضائية
3	6×0.25		
3	3×0.5		
2.5	0.5×3	<p><u>التمرين الثالث : 04 ن</u></p> <p>(1) $z_2 = -r \sin \frac{\theta}{2} + ir \cos \frac{\theta}{2}$ و $z_1 = r \sin \frac{\theta}{2} + ir \cos \frac{\theta}{2}$ ، $\Delta' = r^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$</p> <p>الشكل الأسّي : $z_2 = r e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2})}$ و $z_1 = r e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2})}$</p> <p>(2) المثلث متقايس الأضلاع : $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}$ و $OA = OB$</p> <p>$k \in \mathbb{Z} / \theta = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k ; \theta = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$</p>	الأعداد المركبة والهندسة
1.5	0.5×2		
1.5	0.25×2		
1.5	0.25×2		
4.75	0.25×2	<p><u>التمرين الرابع : 08 ن</u></p> <p>(1) أ - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$</p> <p>ب - $f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{(x+2)^2}$ وإشارته</p> <p>- جدول التغيرات</p> <p>ج - $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x-2)) = 0$ و (D) مقارب مائل</p> <p>رسم C_f</p> <p>د - تبين أن صورة المجال $\left[1; \frac{5}{2}\right]$ محتواة في $\left[1; \frac{5}{2}\right]$</p> <p>(2) أ - تمثيل الحدود U_0 و U_1 و U_2</p> <p>ب - تخمين اتجاه تغير وتقارب (U_n)</p> <p>ج - تبين أن $1 \leq U_n \leq \frac{5}{2}$ و (U_n) متزايدة</p> <p>د - (U_n) متقاربة</p> <p>$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{5}{2}$</p>	الوالمعدنية
0.25×2	0.25×2		
0.5×2	0.5×2		
0.5	0.5		
1	1		
1	1		
0.75	0.75		
1	1		
0.75	0.75		
0.5×2	0.5×2		
0.25	0.25		
3.25	0.25		